



# Eixo Tecnológico Controle e Processos Industriais

## Circuitos Elétricos II – Aula 1

Geração em Corrente Alternada (CA), função senoidal:  
valor médio e valor eficaz e representação fasorial de  
sinais senoidais

Professora Indiara Pitta



# REVISÃO

## ▶ Revisão de conceitos

Tensão elétrica

Corrente elétrica

Potência

Resistência

Capacitor

Indutor

## ▶ Corrente alternada

Geração de tensão alternada

Valor médio e valor eficaz em  
Corrente Alternada

Representação fasorial de sinais  
senoidais

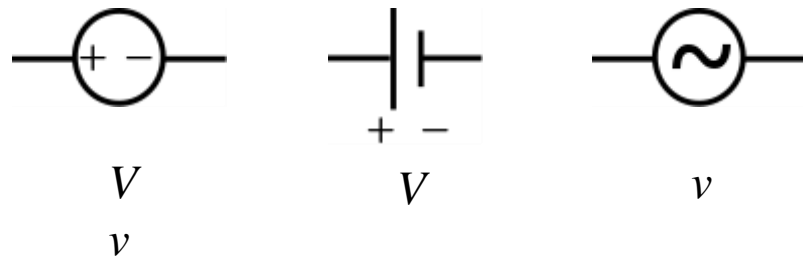
# REVISÃO DE CONCEITOS

- ▶ Tensão elétrica (diferença de potencial)  $V$   
Energia  $W$  (J) dispensada na movimentação de cargas  $Q$  (C).

Volts (V)

$$V = \frac{W}{Q}$$

Uma tensão de 1 V é necessária para mover uma carga de 1 C de um ponto a a um ponto b.



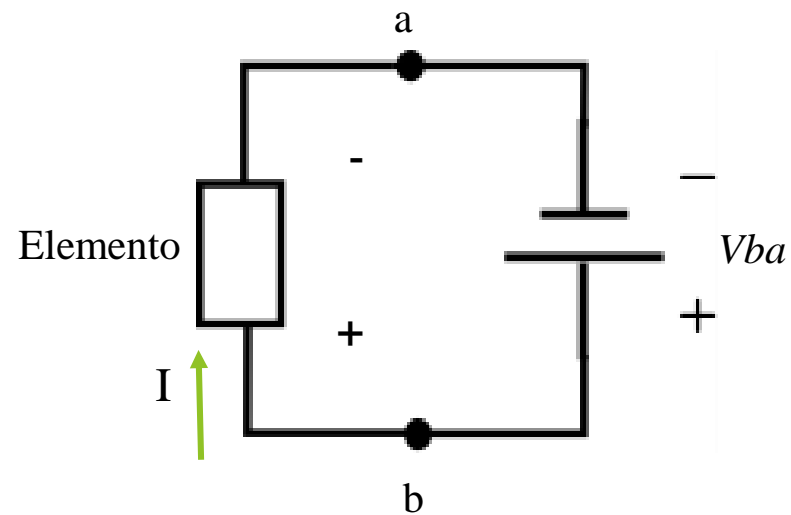
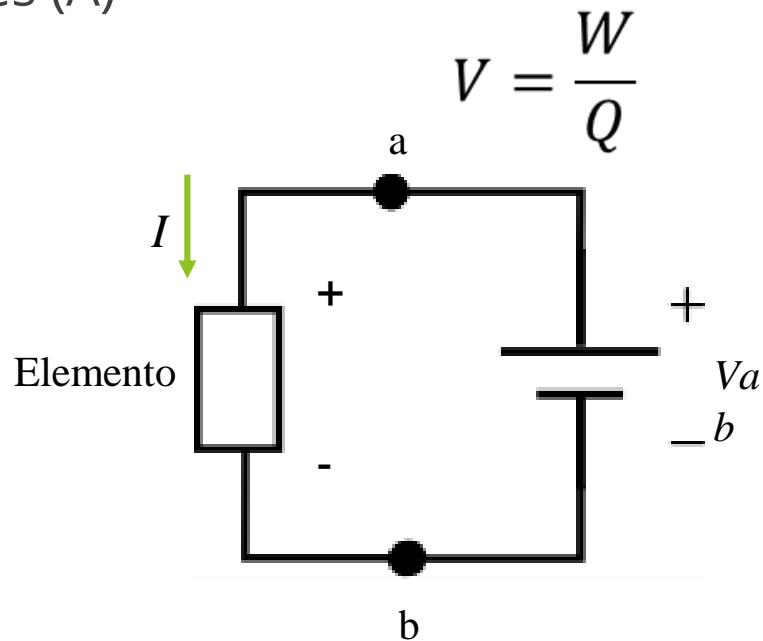
# REVISÃO DE CONCEITOS

## ► Corrente elétrica I

Deslocamento de cargas elétricas (Q).

Gerada a partir da imposição de uma “tensão” que coloca o sistema em movimento.

Ampères (A)



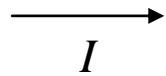
# REVISÃO DE CONCEITOS

## ▶ Corrente elétrica $I$

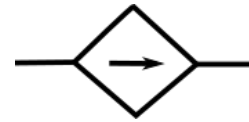
Deslocamento de cargas elétricas ( $Q$ ).

Gerada a partir da imposição de uma “tensão” que coloca o sistema em movimento.

Ampères (A)



$I$   
 $i$



$I$   
 $i$

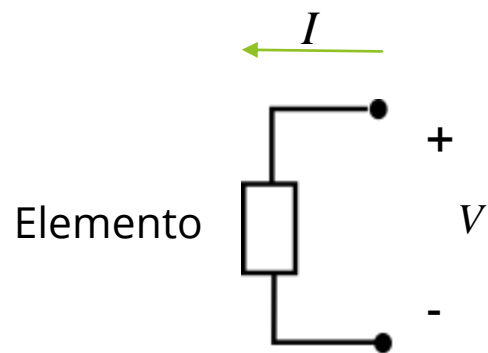
# REVISÃO DE CONCEITOS

## ► Potência P

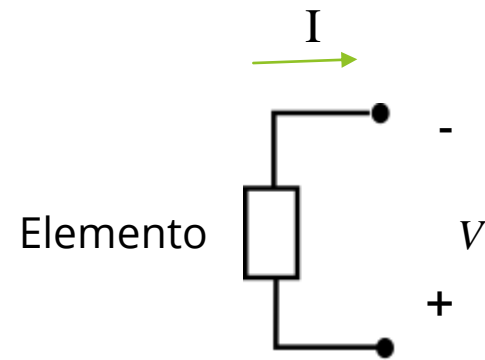
Taxa de consumo (ou geração) de energia.

Watts (W)

$$P = \frac{W}{t} = VI$$



$$P > 0$$



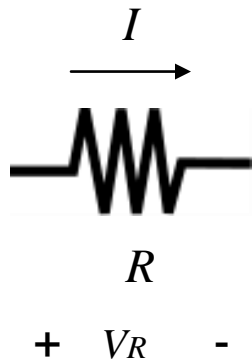
$$P < 0$$

# REVISÃO DE CONCEITOS

## ▶ Resistência elétrica R

Capacidade de “resistir”, se opor a uma corrente elétrica.

Devido a colisões entre elétrons livres e outros elétrons, íons e átomos durante o movimento.



$$R = \frac{\rho l}{S}$$

Resistividade elétrica – propriedade do material ( $\Omega\text{m}$ )

Comprimento da amostra (m)

Seção transversal da amostra ( $\text{m}^2$ )

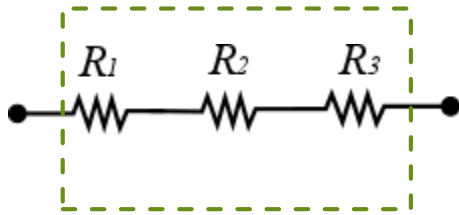
Temperatura

# REVISÃO DE CONCEITOS



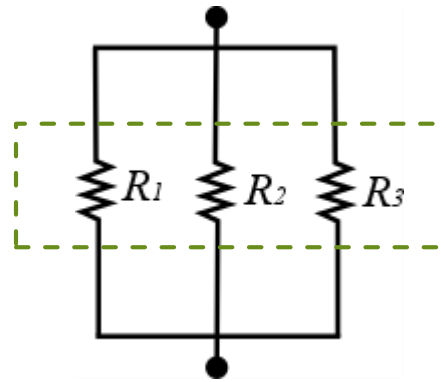
## Resistência elétrica R

Associação de resistores

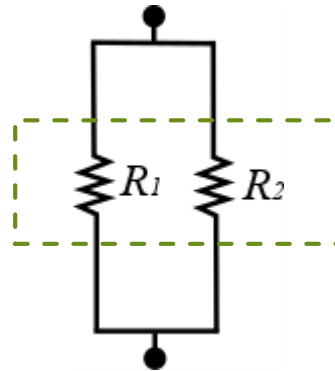


$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Paralelo



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



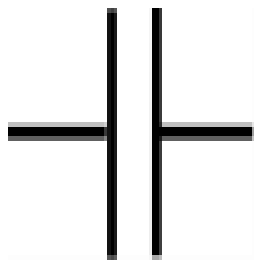
# REVISÃO DE CONCEITOS



## Capacitor

Elemento que armazena energia em seu campo elétrico.

Duas placas condutoras separadas por um dielétrico (isolante).



$C$

$$Q = C V$$



Capacitância (F)

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Em CC é  
um circuito  
aberto

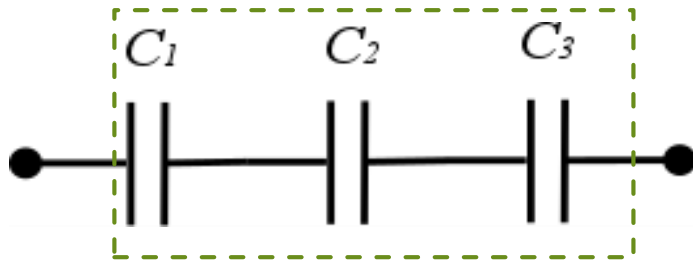
Sua tensão não  
muda  
abruptamente:  
curvas de carga  
e descarga

# REVISÃO DE CONCEITOS



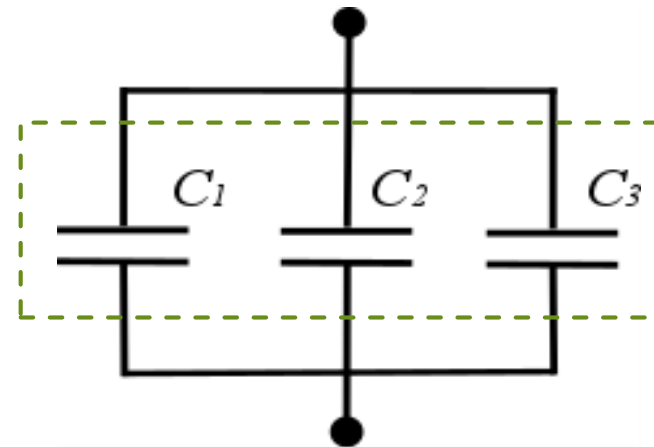
## Capacitor

Associação de capacitores



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

# REVISÃO DE CONCEITOS



## Indutor

Elemento que armazena energia em seu circuito magnético.

Bobina de fio condutor que circunda um núcleo (ar ou material ferromagnético).



$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Indutância (H)

Em CC é um  
curto-circuito

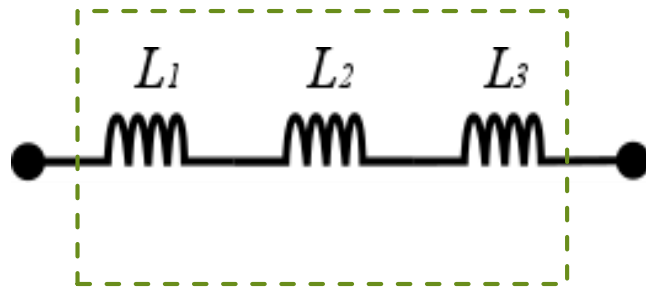
Sua corrente não muda  
abruptamente: curvas de  
carga e descarga

# REVISÃO DE CONCEITOS



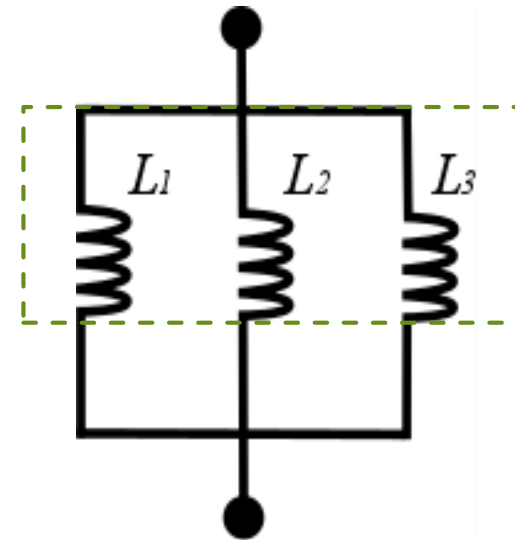
## Indutor

Associação de indutores



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

Paralelo



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

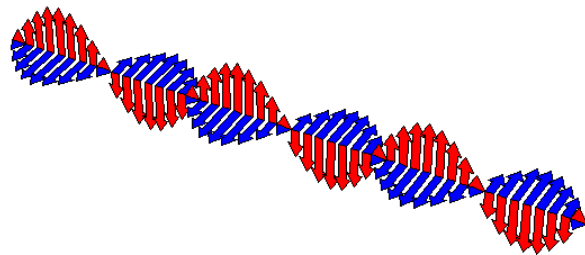
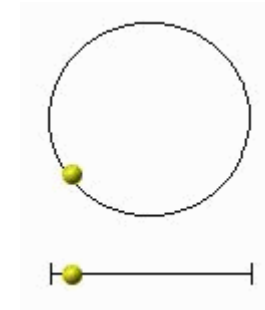
- ▶ Geração de tensão elétrica;  
Função senoidal;  
Valores médios e eficaz;  
Representação fasorial.

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

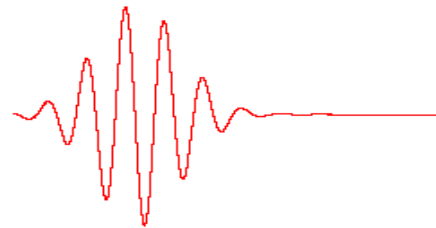
## ► Geração de tensão elétrica

Forma de geração e transmissão de energia elétrica.

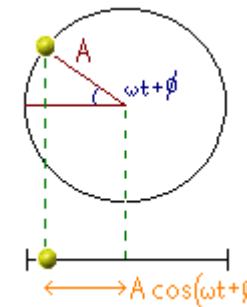
Senoides {  
Sinal seno  
Sinal cosseno



Luz visível : ondas elétrica e magnética perpendiculares



Ondas sonoras



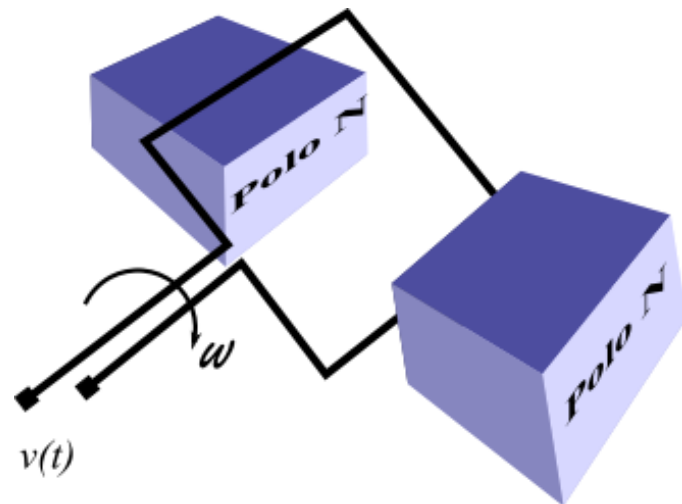
Oscilação: mola, pêndulo

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Geração de tensão elétrica

Forma de geração e transmissão de energia elétrica

Tensão senoidal



$\omega$  (rad/s)

Lei de Faraday-Lenz

$$v(t) = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Fluxo magnético

Número de espiras da bobina

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Função senoidal

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t)$$

Amplitude do sinal

Frequência angular (rad/s)

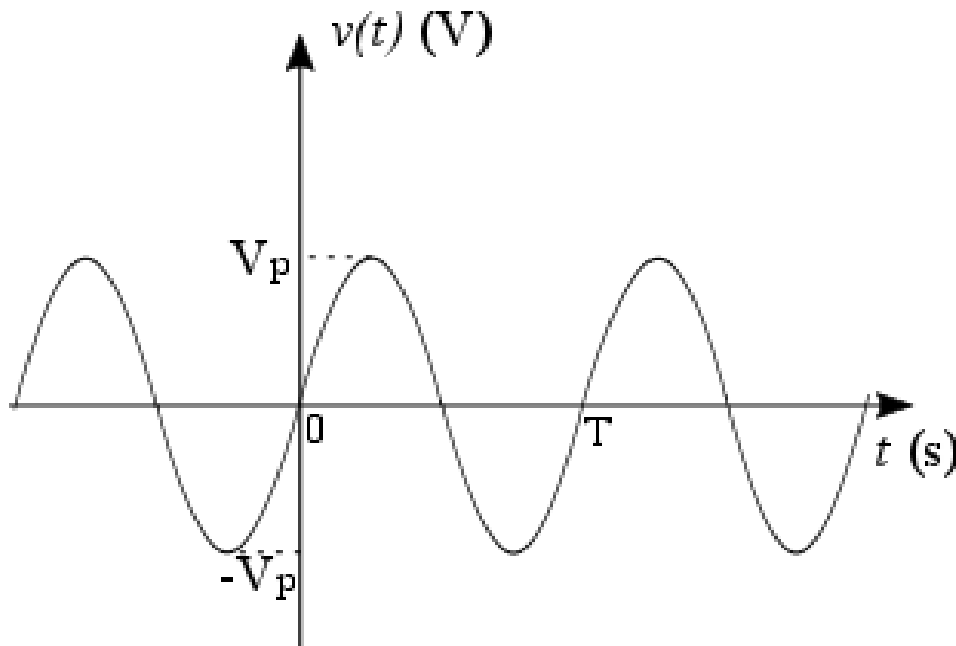
$$\omega = 2\pi f \rightarrow \text{Frequência (Hz)}$$
$$f = \frac{1}{T} \rightarrow \text{Período do sinal (s)}$$



# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Função senoidal

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t)$$



$$V_{pp} = 2V_p$$



Tensão de pico a pico

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Função senoidal

$$v_1(t) = V_p \text{sen}(\omega t)$$

$$v_2(t) = V_p \text{sen}(\omega t - \theta)$$

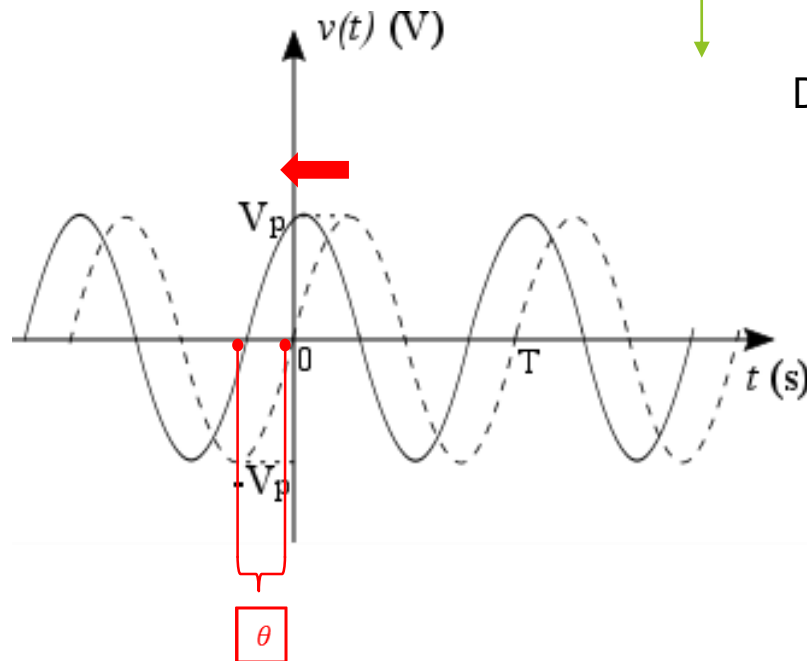
Sinais fora de fase



$v_2(t)$  está adiantado em relação a  $v_1(t)$

Deslocamento angular positivo

$$\theta < 0$$



# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Função senoidal

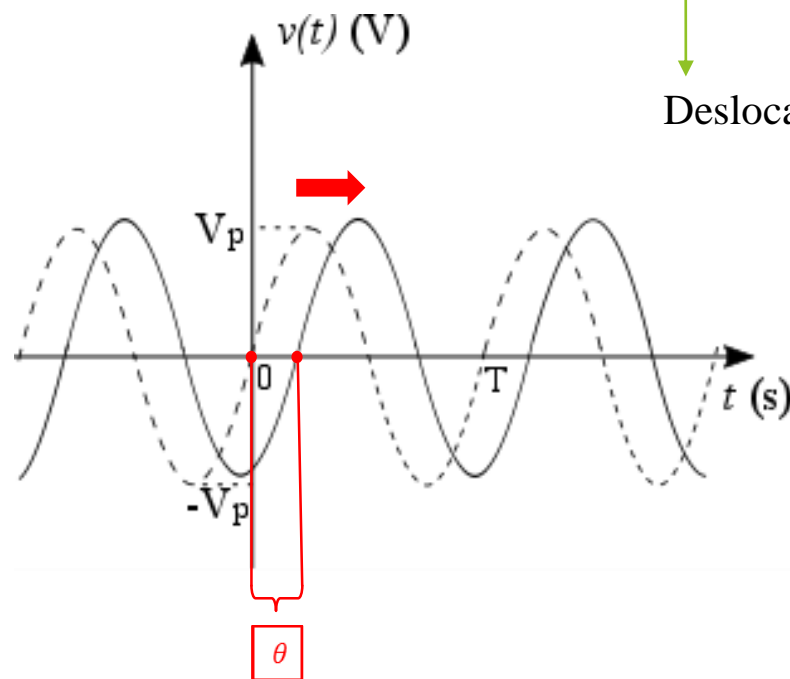
$$v_1(t) = V_p \text{sen}(\omega t)$$

$$v_3(t) = V_p \text{sen}(\omega t - \theta)$$

Sinais fora de fase



$v_3(t)$  está **atrasado em relação a  $v_1(t)$**



Deslocamento angular **negativo**

$$\theta > 0$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Relações importantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}(\omega t + 90^\circ) = \text{cos}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t - 90^\circ) = -\text{cos}(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cos}(\omega t + 90^\circ) = -\text{sen}(\omega t) \\ \text{cos}(\omega t - 90^\circ) = \text{sen}(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}(-\omega t) = -\text{sen}(\omega t) \longrightarrow \text{Função ímpar} \\ \text{cos}(-\omega t) = \text{cos}(\omega t) \longrightarrow \text{Função par} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}(\omega t + 180^\circ) = -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t - 180^\circ) = -\text{sen}(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cos}(\omega t + 180^\circ) = -\text{cos}(\omega t) \\ \text{cos}(\omega t - 180^\circ) = -\text{cos}(\omega t) \end{array} \right.$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.

$$F_{\text{médio}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

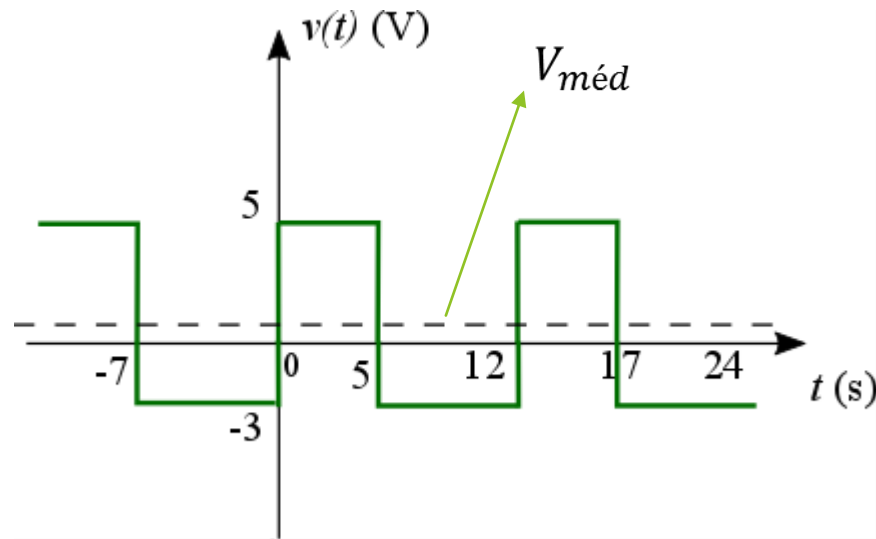
Área sob a curva da função

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.



$$V_{méd} = \frac{1}{12} \int_0^{12} v(t) dt$$

$$V_{méd} = \frac{1}{12} \left( \int_0^5 5 dt + \int_5^{12} -3 dt \right)$$

$$V_{méd} = \frac{1}{12} \left( 5t \Big|_0^5 - 3t \Big|_5^{12} \right)$$

$$V_{méd} = \frac{1}{12} \left( (25 - 0) - (36 - 15) \right)$$

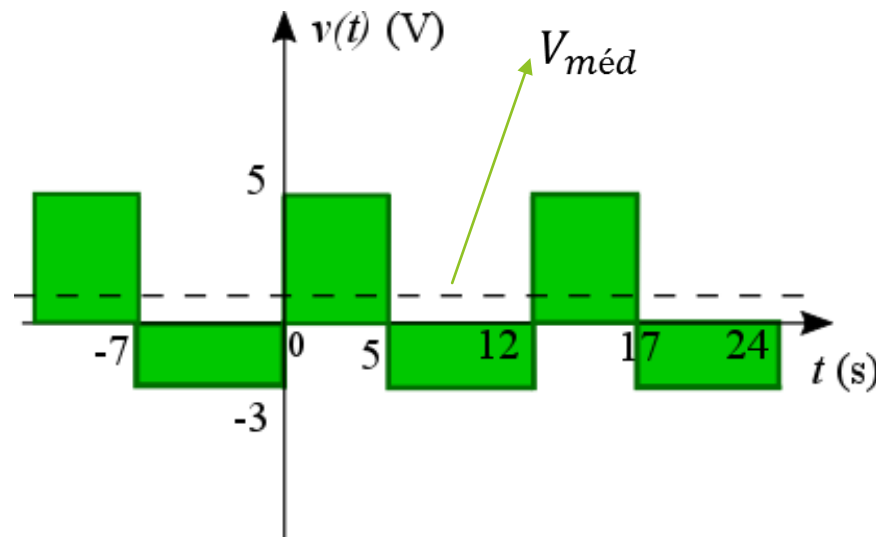
$$V_{méd} = 1/3 V$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.



$$V_{méd} = \frac{5 \cdot 5 + (-3 \cdot 7)}{12}$$

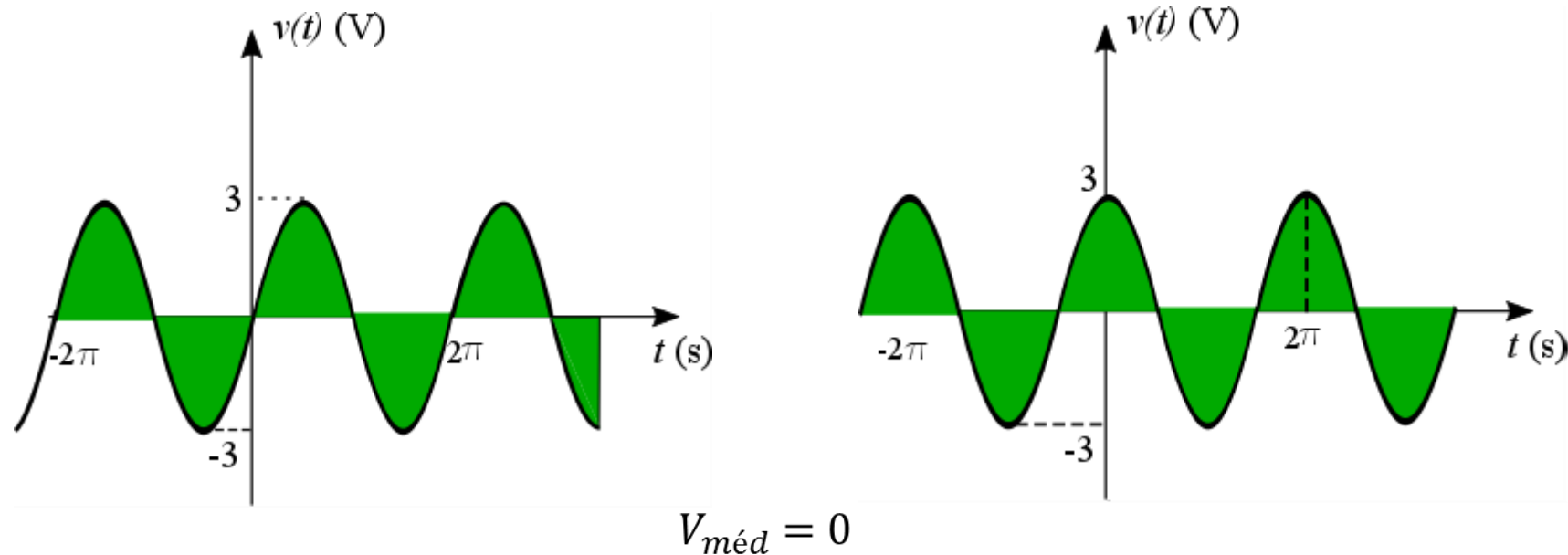
$$V_{méd} = 1/3 \text{ V}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.



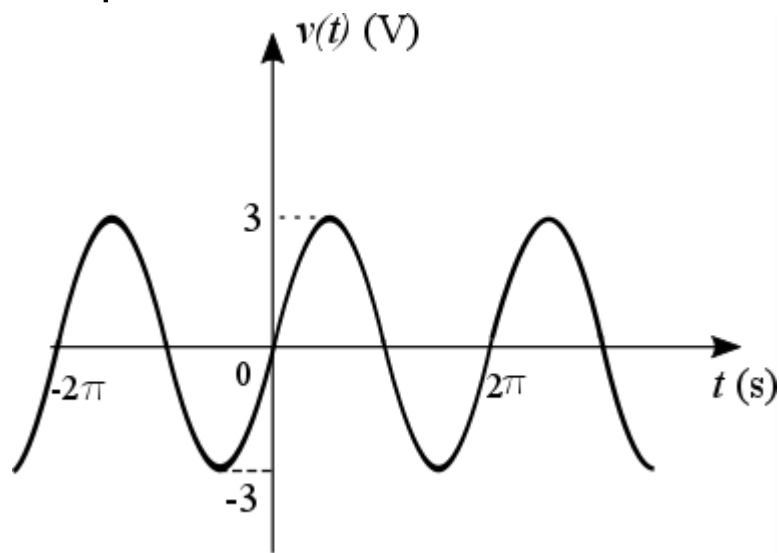


# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.



$$v(t) = 3\text{sen}(t)$$

$$V_{\text{méd}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 3\text{sen}(t) dt$$

$$V_{\text{méd}} = \frac{3}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) dt \right)$$

$$V_{\text{méd}} = \frac{3}{2\pi} \left( (-\cos(t)) \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$V_{\text{méd}} = \frac{3}{2\pi} (-1 + 1)$$

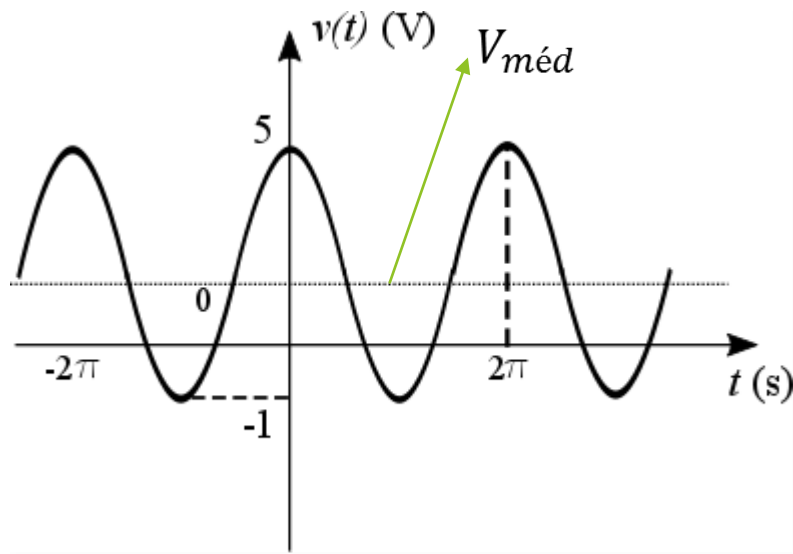
$$V_{\text{méd}} = 0 V$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor médio de um sinal

Indica a média dos valores do sinal (função) em um determinado período de tempo.



$$v(t) = 3\cos(t) + 2$$

$$V_{méd} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3\cos(t) + 2) dt$$

$$V_{méd} = \frac{3}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 dt$$

$$V_{méd} = \frac{3}{2\pi} \left( \text{sen}(t) \Big|_0^{2\pi} \right) + \frac{1}{2\pi} (2t \Big|_0^{2\pi})$$

$$V_{méd} = \frac{3}{2\pi} (0 - 0) + \frac{1}{2\pi} (4\pi - 0)$$

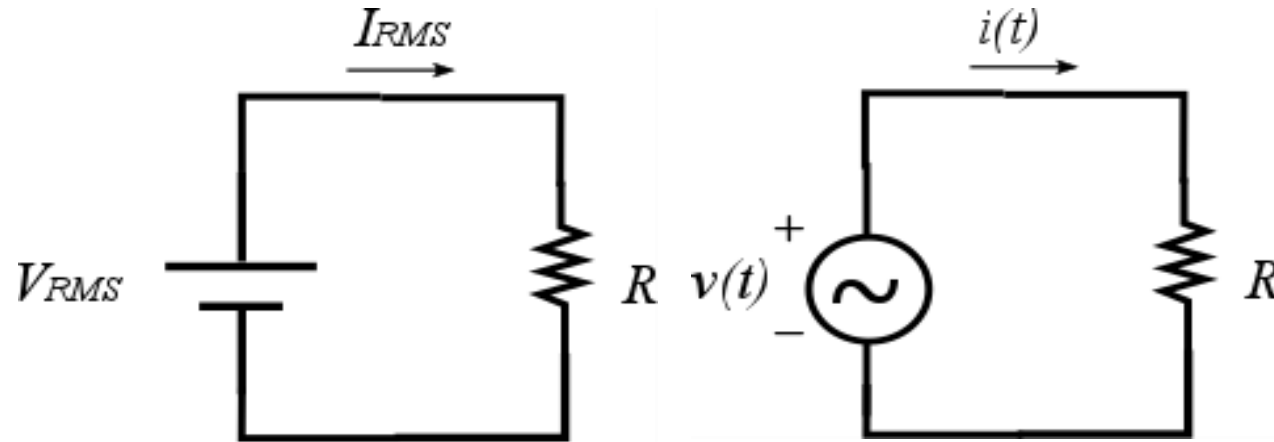
$$V_{méd} = 2 V$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

### Valor eficaz

Valor contínuo de corrente (ou tensão) que fornece uma potência média a um resistor equivalente à potência fornecida a este mesmo resistor por uma corrente (ou tensão) alternada.



# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

### Valor eficaz

Valor contínuo de corrente (ou tensão) que fornece uma potência média a um resistor equivalente à potência fornecida a este mesmo resistor por uma corrente (ou tensão) alternada.

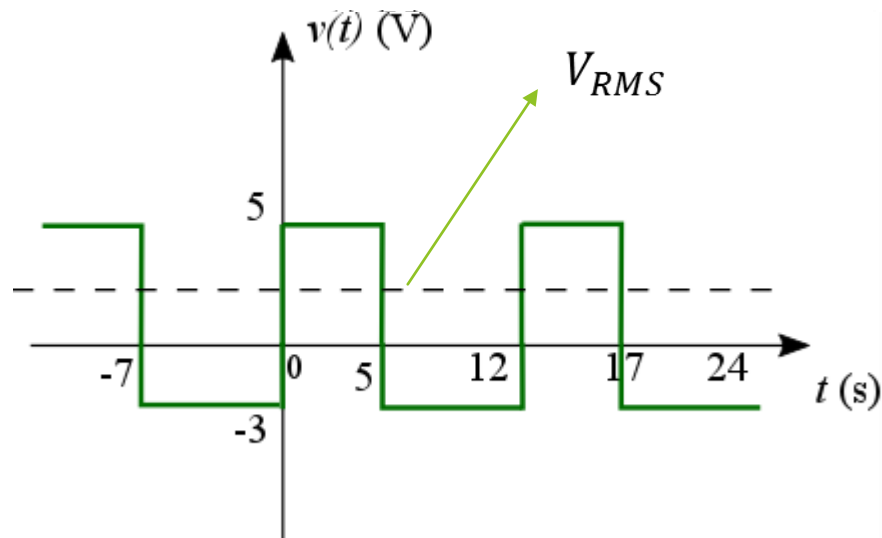
Também chamado de equivalente contínuo ou valor “raiz do quadrado médio”  
Root Mean Square (RMS), em inglês.

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 dt}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor eficaz



$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{12} \int_0^{12} v(t)^2 dt}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{12} \left( \int_0^5 5^2 dt + \int_5^{12} (-3)^2 dt \right)}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{12} (25t|_0^5 + 9|_5^{12})}$$

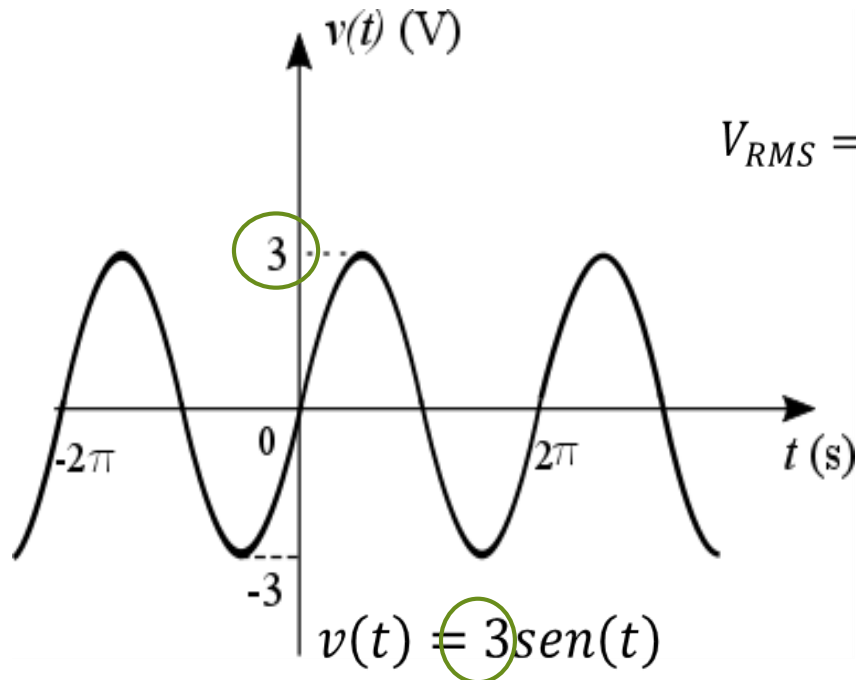
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{12} ((125 - 0) - (108 - 45))}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{62}{12}} = 2,27 V$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Valores médio e eficaz (RMS)

Valor eficaz



$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3\text{sen}(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{9}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \text{sen}(t)^2 dt \right)}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{9}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) dt \right)} = \sqrt{\frac{9}{4\pi} \left( t \Big|_0^{2\pi} - \frac{\text{sen}(2t)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right)}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{9}{4\pi} \left( (2\pi - 0) - (0 - 0) \right)}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

- ▶ Valores médio e eficaz (RMS)

Valor eficaz

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \theta) \quad i(t) = I_p \text{sen}(\omega t + \theta)$$

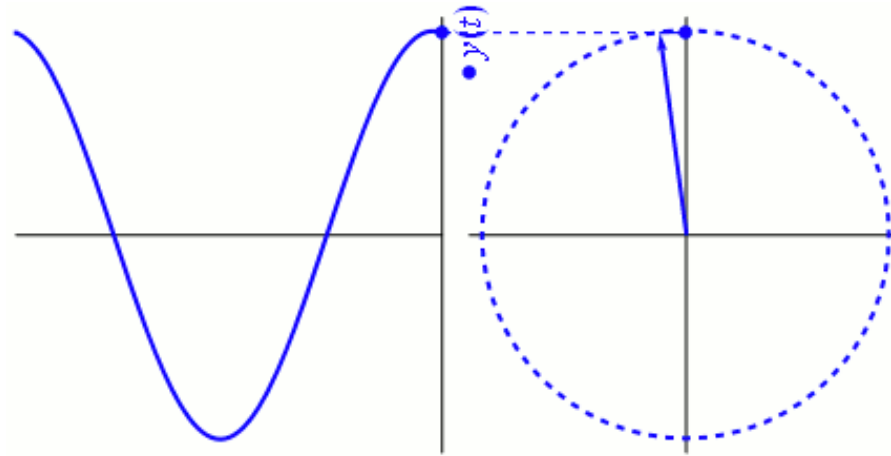
$$V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

$$I_p = \sqrt{2} I_{RMS}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

- ▶ Representação fasorial de sinais senoidais

Número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide.





# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Representação fasorial de sinais senoidais

Número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide.

Senoide

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \theta)$$

- Amplitude
- Frequência
- Fase

Fasor

$$\dot{V} = r \angle \theta$$

- Amplitude
- Fase

$$\dot{V} = x + jy$$

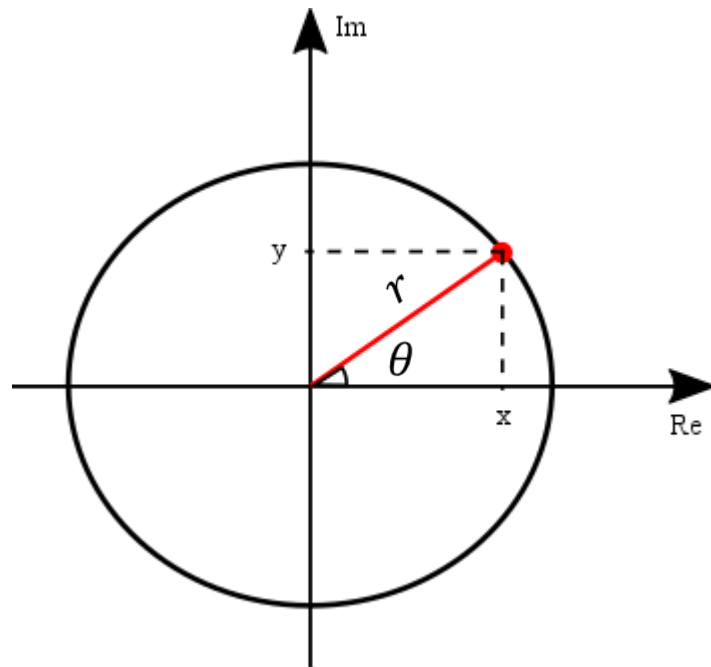
- Parte real de  $\dot{V}$
- Parte imaginária de  $\dot{V}$

$$j = \sqrt{-1}$$

# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Representação fasorial de sinais senoidais

Relações entre formas polar e retangular.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg(y/x)$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sen(\theta)$$

Fórmula de Euler:  $e^{\pm j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{Re}(e^{j\theta})} \pm j \underbrace{\sen(\theta)}_{\text{Im}(e^{j\theta})}$

$$Z = x + jy = r \angle \theta = r(\cos(\theta) + j\sen(\theta)) = re^{j\theta}$$

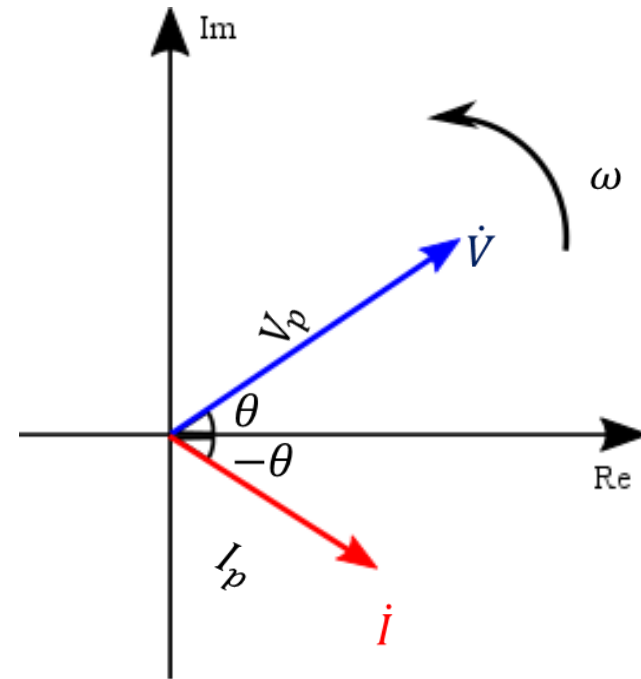
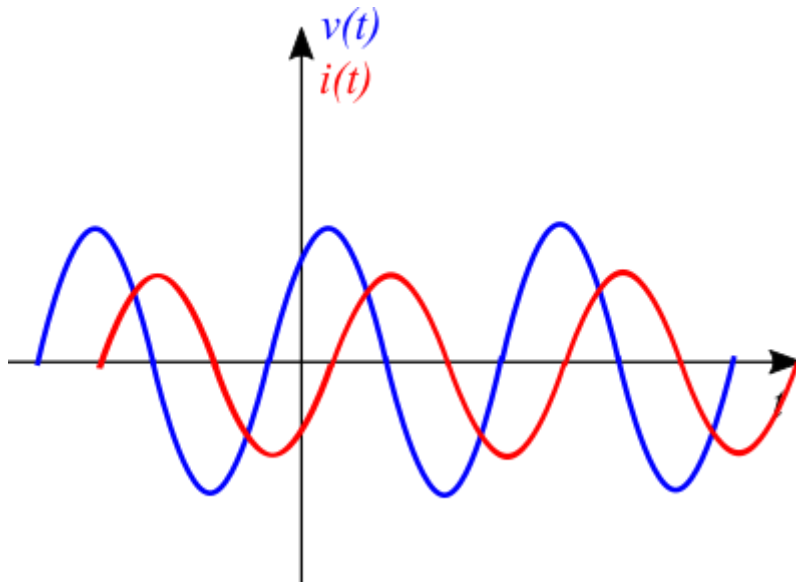
# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Representação fasorial de sinais senoidais

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_p \text{sen}(\omega t - \theta)$$

$$\boxed{\dot{V} = V_p \angle \theta \quad \dot{I} = I_p \angle -\theta}$$

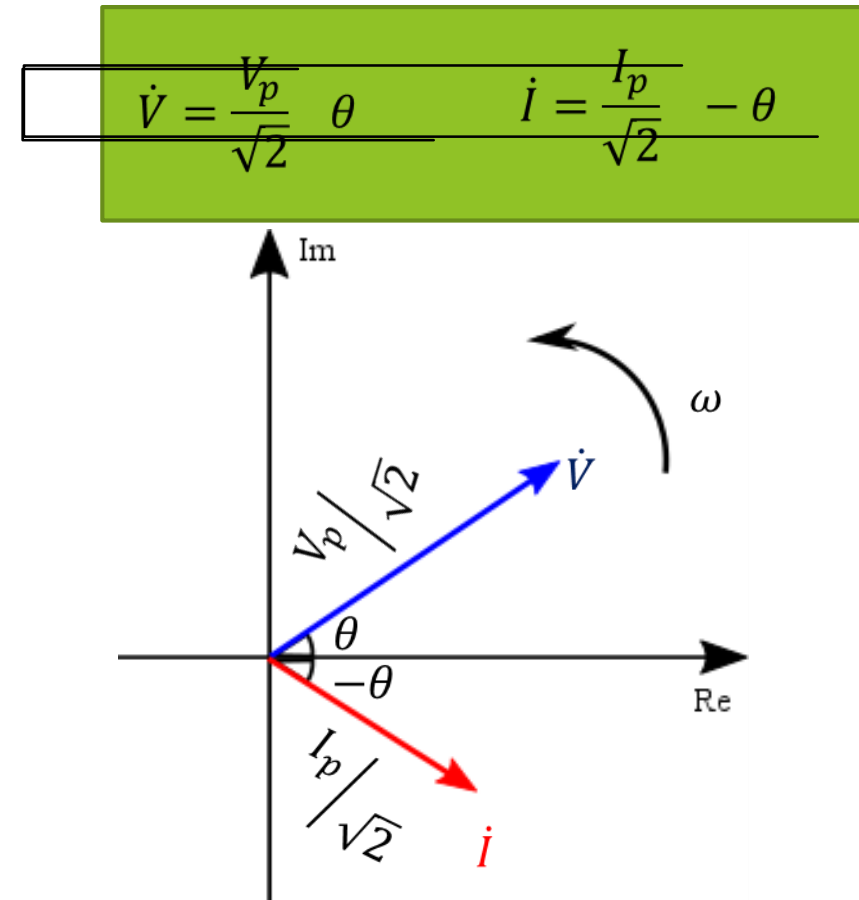
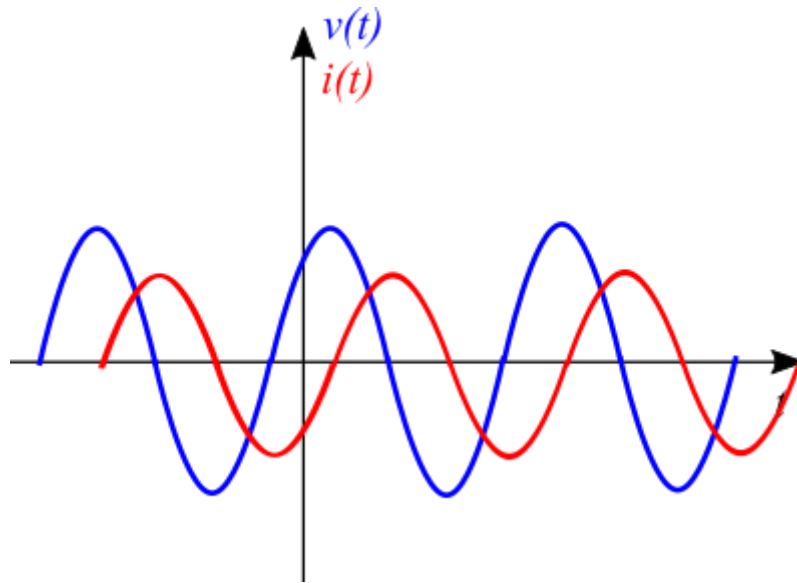


# GERAÇÃO EM CORRENTE ALTERNADA (CA)

## ► Representação fasorial de sinais senoidais

Fasor □ Valor RMS

$$v(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \theta) \quad i(t) = I_p \text{sen}(\omega t - \theta)$$



# TAREFA 1

- ▶ 1) Explique como pode ser gerada uma tensão alternada.
- ▶ 2) a) Calcule o valor médio e o valor eficaz do sinal  $v(t) = 12\text{sen}(3t + 30^\circ)V$
- ▶ b) Represente o sinal  $v(t)$  da questão 2 na forma fasorial.
- ▶ c) Dado o sinal fasorial  $\dot{I}$ , escreva  $i(t)$ . Considere a frequência  $f$  de 60 Hz.

$$\dot{I} = 2,1213 \angle -50^\circ \text{ (A)}$$

# REFERÊNCIAS

SADIKU, M. N. O.; MUSA, S. M.; ALEXANDER, W. K. **Análise de Circuitos Elétricos com Aplicações**. Porto Alegre: McGraw Hill Education, 2014. v. 3.

BOYLESTAD, R. L. **Introdução à Análise de Circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

GIF Onda eletromagnética. Disponível em:

<http://www.if.ufrgs.br/cref/camiladebom/Aulas/Pages/2.html>.

GIF onda sonora. Disponível em: <https://gifimage.net/ondas-sonoras-gif-6/>.

GIF oscilação mola. Disponível em:

<https://www.if.ufrj.br/~bertu/fis2/oscila/oscilacoes.html>.

GIF senoide e fasor. Disponível em: <https://www.mql5.com/pt/articles/288>