As assíntotas e as suas formas de identificação

Vamos ao exemplo da função $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

As assíntotas estão relacionadas ao comportamento de uma função.

1) As assíntotas verticais tem relação sempre com o domínio da função, ou seja, a condição e existência da função ou dito de outra forma, para que valores de ‘x’ domínio a função está definida.

ASSÍNTOTA VERTICAL:

Uma linha reta vertical x = a é chamada de assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:

1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ 3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

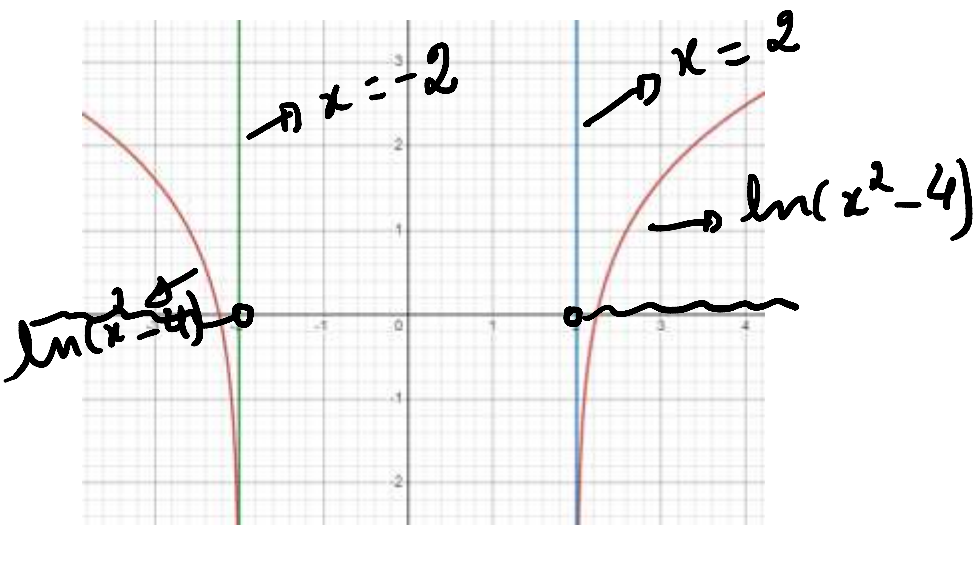
No caso para a função logarítmica sabemos que a condição de existência do logaritmando é ser sempre maior que zero, ou seja, $log_a b$ neste caso $b > 0$ no seu caso o logaritmando é uma função quadrática assim devemos resolver a inequação $x^2 - 4 > 0$ como vocês já aprenderam esta resolução teremos $x > 2$ ou $x < -2$ para esta caso teremos que analisar o que acontece com a função ln quando x se aproxima de -2 pela esquerda e x se aproxima de 2 pela direita, da seguinte forma:

$\lim_{x \to -2^-}(\ln(x^2 - 4))$ $=\lim_{x \to -2^-}(\ln((-2^-)^2 - 4))$ o resultado de um valor antes do menos 2 ao quadrado será um valor acima de 4, logo a diferença será um número positivo muito próximo de zero, mas que não é o zero, o ln de um número próximo de zero tem ao menos infinito o mesmo acontece quando utilizamos valores para o 2 pela direita

$\lim_{x \to 2^+}(\ln(x^2 - 4))$ $= \lim_{x \to 2^+}(\ln((2^+)^2 - 4))$ o resultado de um valor maior que 2 ao quadrado será um valor acima de 4, logo a diferença será um número positivo muito próximo de zero, acontecendo o mesmo que a situação anterior, assim:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = -\infty$, mostrando que x = -2 e que x = 2 são assíntotas verticais.

Agora sim observe no gráfico:



Por outro lado neste caso não há assíntotas horizontais, pois , em nenhum caso acontece que

ASSÍNTOTA HORIZONTAL

A linha horizontal y = b é chamada de assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Se aplicarmos o limite para o infinito na função

$\lim_{x \to -\infty} \left(\ln((-\infty)^2 - 4)\right)$ $= \lim_{x \to -\infty} \left(\ln(\infty - 4)\right) = \infty$ e não se aproxima de uma constante , o mesmo ocorre se substituirmos para o infinito positivo, logo se a função no infinito não tende a um ponto, então, não tem assíntota horizontal.

Por isso chamei a atenção em aula sobre a descontinuidade removível e a diferença entre determinar o limite para as funções do tipo

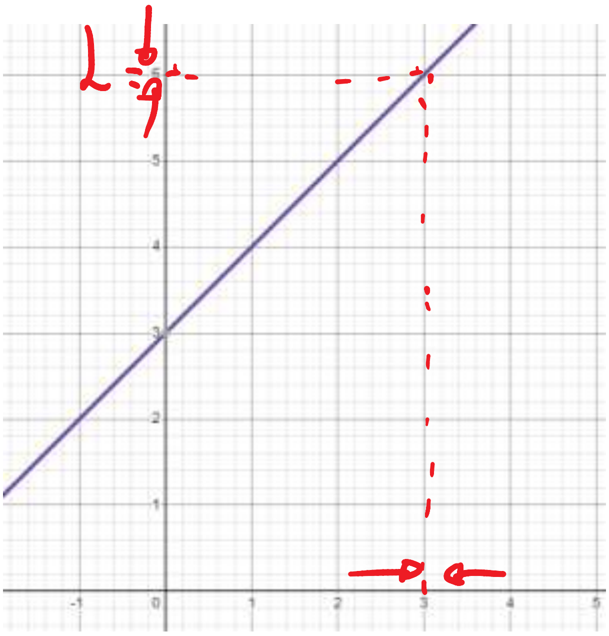
$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ quando x se aproxima de 3, um caso de restrição no seu domínio, vejamos que o que acontece :

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$? O que fazer?

Podemos fatorar e reescrever:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} 3+3 = 6$$

Neste caso não há assíntota, pois, no limite não foi para o infinito, pois a descontinuidade é removível. Veja o gráfico:



No entanto para a função $g(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ neste caso temos duas restrições no domínio para x = 3 ou x = -3, quando se aplica o limite tendendo para 3 temos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0} \text{ ? O que fazer?}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \text{ //}$$

No entanto como $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ quando se aplica o limite para x tendendo para -3, vamos ver que no limite teremos:

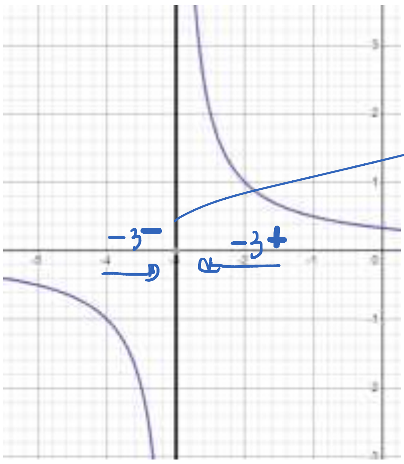
$$\lim_{x \to -3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{-3+3} = \boxed{\frac{1}{0} = \infty.}$$

Neste caso é preciso analisar quando x se aproxima pela esquerda e pela direita do -3 se for pela esquerda será um pouquinho menos que 3 logo a resposta será negativa e fica:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{-3^- + 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{-3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

vejamos o gráfico

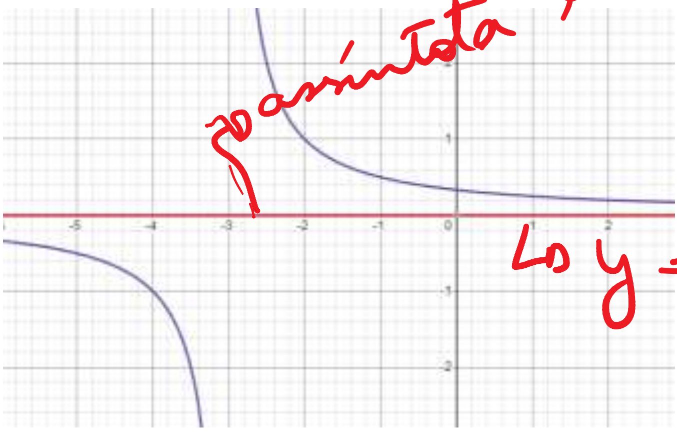


$x = -3$ é assíntota vertical

Aqui também podemos observar a assintota horizontal, no caso

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\infty + 3} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\infty + 3} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$



A linha horizontal y = b é chamada de assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ 2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

neste caso $\boxed{b = 0}$

Lebrem-se que assintota vertical tem relação sempre com as possíveis restrições que a função tem em seu domínio, analisando se é removível ou não, ou em parte.

A assintota horizontal sempre tem relação com a a nális de função quando envolve o limite no infinito.